19. Let F be a field and let V be the set of all polynomials in x of degree $n-1$ or less over F with the basis $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Also let T be a linear transformation of differentiation operator. Then find the matrix of T.

F ஒரு புலமாகவும், V என்பது x ஆல் $n-1$ வரிசை அல்லது அதைவிட குறைவாக உள்ள அனைத்து பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் தொகுப்பாகவும் $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ அடிப்படை கணமாகவும் இருக்கட்டும். மேலும் நேரியல் மாற்றம் T என்பது வகைக்கெழு ஆப்பரேட்டர் எனில் T இன் அணிக்கோவையைக் கண்டறியவும்.

20. Solve the following system of equations by using Cramer's rule:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = -7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

பின்வரும் சமன்பாடுகளின் அமைப்பை கிராமர் விதியைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கவும்:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = -7$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

APRIL/MAY 2024

CMA61 — LINEAR ALGEBRA

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define vector space over a field.

ஒரு புலத்தின் மீது திசையன் இடவெளியை வரையறுக்கவும்.

2. How do you define homomorphism between two vector spaces?

இரண்டு திசையன் இடைவெளிகளுக்கு இடையே உள்ள ஹோமோமார்பிஸத்தை எப்படி வரையறுக்கிறீர்கள்?

3. Define annihilator of W of a vector space V.

ஒரு திசையன் இடவெளி V இன் அனிஹிலேட்டரை W வரையறுக்கவும்.

4. Let $W^{\perp}$ be an orthogonal complement of a subspace W of V, then prove that $W^{\perp}$ is a subspace of V.

V இன் துணைவெளி W இன் ஆர்த்தோகனல் நிரப்புக்கூறு $W^{\perp}$ யாக இருக்கட்டும், பின்னர் $W^{\perp}$ ஆனது V இன் துணைவெளி என்பதை நிரூபிக்கவும்.

5. Define a linear transformation in a vector space V over a field F.

F புலத்தின் மீது ஒரு திசையன் இடவெளி V இல் நேரியல் மாற்றத்தை வரையறுக்கவும்.

6. What do you mean by an invertible (or regular) element of a linear transformation T in $A(V)$, where $A(V)$ is a Hom (V,V).

$A(V)$ என்ற Hom (V,V) இல் உள்ள நேரியல் உருமாற்றம் T யின் $A(V)$ நேர்மாறான (அல்லது வழக்கமான) உறுப்பு என்பதை வரையறுக்கவும்.

7. Construct a matrix for a linear transformation T of $A(V)$ in which $v_1, v_2, \ldots v_n$ are the basis elements of V.

$A(V)$ இன் நேரியல் உருமாற்றம் T க்கு ஒரு அணியை உருவாக்கவும். இங்கு $v_1, v_2, \ldots v_n$ என்பது V இன் அடிப்படைக் கூறுகள்.

8. Define similar linear transformations.

ஒத்த நேரியல் மாற்றங்களை வரையறுக்கவும்.

9. Define symmetric and skew-symmetric matrices.

சமச்சீர் மற்றும் வளைவு-சமச்சீர் அணிகளை வரையறுக்கவும்.

10. What do you mean by secular equation of a matrix?

ஒரு அணியின் செக்குலர் சமன்பாடு என்றால் என்ன?

17. State and prove Gram-Schmidt orthogonalization process for a finite dimensional inner product space.

வரையறுக்கப்பட்ட பரிமாண உட்பெருக்க இடைவெளியில் கிராம்-ஷ்மிட் செங்குத்தாதல் செயல்முறையைக் கூறி நிரூபிக்கவும்.

18. Let V be finite dimensional vector space over a field F. Then for $S, V \in A(V)$ prove the following:

(a) $r(ST) \leq r(T)$;

(b) $r(TS) \leq r(T)$;

(c) $r(TS) = r(ST) = r(T)$ for S regular in $A(V)$.

V என்பது புலம் F மீது வரையறுக்கப்பட்ட பரிமாண திசையன் இடவெளியாக இருக்கட்டும். $S, V \in A(V)$ எனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(அ) $r(ST) \leq r(T)$;

(ஆ) $r(TS) \leq r(T)$;

(இ) $r(TS) = r(ST) = r(T)$ இங்கு S ஆனது $A(V)$ யில் ரெகுலர் உறுப்பாகும்.

15. (a) Let F be of characteristic 0 and let $S,T \in A(V)$, be such that $ST - TS$ commutes with S. Then show that $ST - TS$ is nilpotent.

F என்பது 0 சிறப்பியல்புடையதாக இருக்கட்டும், மற்றும் $S,T \in A(V)$, $ST - TS$ ஆனது S உடன் இடமாற்றியமைக்கும் வகையில் இருக்கும். எனில் $ST - TS$ நில்பொட்டென்ட் என்பதைக் காட்டுக.

Or

(b) Prove that the determinant of a triangular matrix is the product of its entries on the main diagonal.

ஒரு முக்கோண அணியின் தீர்மானிப்பான் என்பது பிரதான மூலைவிட்டத்தில் உள்ள அதன் உள்ளீடுகளின் பெருக்கற்பெலனுக்கு சமமாகும் என நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. If V is finite-dimensional and if W is a subspace of V, then prove that W is finite-dimensional, $\dim W \leq \dim V$ *and* $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$.

V என்பது வரையறுக்கப்பட்ட பரிமாணமாகவும், W என்பது V இன் துணைவெளியாகவும் இருந்தால், W என்பதை வரையறுக்கப்பட்ட பரிமாணமானது நிரூபிக்கவும், மேலும் $\dim W \leq \dim V$ மற்றும் $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$ எனவும் நிரூபி.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that $L(S)$ is a subspace of the vector space V where $L(S)$ is a linear span S of V

$L(S)$ என்பது திசையன் இடைவெளி V இன் துணைவெளி என்பதை நிரூபிக்கவும், இதில் $L(S)$ என்பது V இன் நேரியல் இடைவெளி S ஆகும்.

Or

(b) If $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$ are linearly independent, then show that every element in their linear span has a unique representation in the form $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ldots + \lambda_n v_n$ with the $\lambda_i \in F$.

$v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$ ஆகியவை நேரியல் சார்பற்றது, பின்னர் அவற்றின் நேரியல் விரிவளவில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \ldots + \lambda_n v_n \in F$ வடிவில் $\lambda_i \in F$ உடன் தனிப்பட்ட பிரதிநிதித்துவம் இருப்பதைக் காட்டுங்கள்.

12. (a) Let V and W be of dimensions m and n, respectively, over F. Then prove that $\mathrm{Hom}(V,W)$ is of dimension mn over F.

V மற்றும் W ஆகியவை முறையே, m மற்றும் n என்ற பரிமாணங்களாக புலம் F இல் இருக்கட்டும். எனில், $\mathrm{Hom}(V,W)$ ஆனது mn பரிமாணத்தல் F இல் இருப்பதை நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) State and prove Schwarz inequality in an inner product space.

ஒரு உட்பெருக்க இடைவெளியில் ஸ்வார்ஸ் சமத்துவமின்மையை நிலைநாட்டி நிரூபிக்கவும்.

13. (a) Let A be an algebra, with unit element, over F, and suppose that A is of dimension m over F. Then prove that every element in A satisfies some nontrivial polynomial in $F[X]$ of degree at most m.

புலம் F இல், A என்பது ஒரு அலகு உறுப்புடன் கூடிய இயற்கணிதம், மற்றும் A ஆனது m பரிமாணமாக உள்ளது என்று வைத்துக்கொள்வோம். பிறகு A இல் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் $F[X]$ இல் சில சாரமற்ற அதிகபட்சமாக m வரிசை கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைகளை நிறைவு செய்கிறது என்பதை நிரூபிக்கவும்.

Or

(b) If $\lambda \in F$ is a characteristic root of $T \in A(V)$, then show that for any polynomial $q(x) \in F[x], q(\lambda)$ is a characteristic root of $q(T)$.

$\lambda \in F$ என்பது $T \in A(V)$ இன் ஒரு சிறப்பியல்பு மதிப்பு எனில், பின்னர் எந்த பல்லுறுப்புக் கோவை $q(x) \in F[x]$ இல் எடுத்துக்கொண்டாலும், $q(\lambda)$ என்பது $q(T)$ இன் ஒரு சிறப்பியல்பு மதிப்பாக இருக்கும் எனக்காட்டுக.

14. (a) If V is n-dimensional over F and if T in $A(V)$ has the matrix $m_1(T)$ in the basis $v_1, v_2, ..., v_n$ and the matrix $m_2(T)$ in the basis $w_1, w_2, ...w_n$ of V over F, then prove that there is an element $C \in F_n$, such that $m_2(T) = Cm_1(T)C^{-1}$.

ஒரு புலம் F இல் V என்பது n-பரிமாணமாக இருக்கட்டும் மற்றும் $T \in A(V)$ ஆனது $v_1, v_2, ..., v_n$ என்ற அடிப்படையில் அணி $m_1(T)$ ஐயும், $w_1, w_2, ...w_n$ என்ற அடிப்படையில் அணி $m_2(T)$ ஐயும் கொண்டுள்ளது, பின்னர் ஒரு உறுப்பு $C \in F_n, m_2(T) = Cm_1(T)C^{-1}$ எனக் காட்டும் என நிரூபி.

Or

(b) Let V be n-dimensional vector space over F and let $T \in A(V)$ has all its characteristic roots in F. Then prove that T satisfies a polynomial of degree n over F.

ஒரு புலம் F இல் V என்பது n-பரிமாணமாக இருந்தால் மற்றும் $T \in A(V)$ ஆனது F இல் அதன் அனைத்து சிறப்பியல்பு மதிப்புகளையும் கொண்டிருக்கட்டும். எனில் T ஆனது n வரிசை பல்லுறுப்புக்கோவையை பூர்த்தி செய்கிறது என்பதை நிரூபிக்கவும்.